Составил: доц. Брацлавский А. А.,
компьютерная вёрстка: доц. Брацлавский А.А.

МАТЕМАТИКА 3

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Первообразная

Определение. Функция $F(x)$, дифференцируемая на некотором промежутке X числовой оси, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на этом промежутке, если $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$.

2. Неопределенный интеграл

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке X называется ***неопределённым интегралом*** от этой функции на этом промежутке и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ - знак интеграла;

x – переменная интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

dx – дифференциал переменной интегрирования;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$;

C – произвольная постоянная.

Свойство 1. Для любого ненулевого числа c справедливо равенство

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Свойство 2. Для любых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ справедливо равенство

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

3. Таблица неопределенных интегралов

В таблице неопределённых интегралов u обозначает как независимую переменную, так и любую дифференцируемую функцию $u = u(x)$. Все формулы таблицы интегралов проверяются дифференцированием правой части формулы – результатом при этом является подынтегральная функция.

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ при $\alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

3. $\int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u du = \sin u + C.$

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \dfrac{u}{a} + C, \\ -\arccos \dfrac{u}{a} + C. \end{array}\right.$

9. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C, \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C. \end{array}\right.$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$

12. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| + C.$

13. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u| + C.$

14. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$

4. Формула интегрирования по частям

Пусть даны две функции $u = u(x), v = v(x)$, имеющие непрерывные производные. Тогда справедлива формула ***интегрирования по частям***:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Если рассматривается определённый интеграл по промежутку $[a; b]$, то формула интегрирования по частям принимает вид:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

при условии, что определённые интегралы справа и слева существуют.

5. Определенный интеграл и его геометрический смысл

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a; b]$. Выполним следующие операции:

1. Разобьём промежуток $[a;b]$ на n промежутков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. Найдём длины этих промежутков:

$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

3. На каждом промежутке возьмём по одной точке, обозначим их $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

4. В этих точках вычислим значения функции: $f(m_1), f(m_2), \ldots, f(m_n)$.

Составим сумму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k$. Эта сумма называется ***интегральной суммой*** или *суммой Римана* для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Сумма Римана зависит как от способа разбиения промежутка $[a;b]$ на промежутки, так и от выбора точек в каждом промежутке.

5. Назовём ***рангом дробления*** наибольшую из длин $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, обозначим его λ.

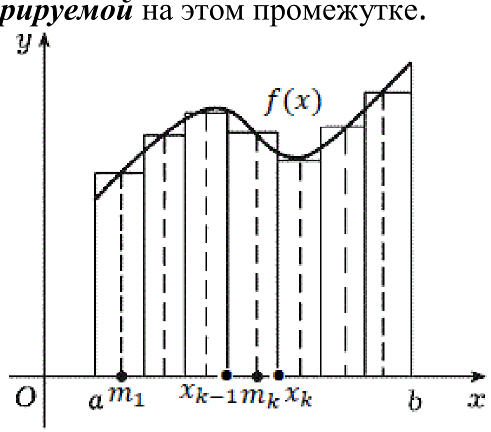
6. Устремим λ к 0, при этом количество промежутков n стремится к бесконечности.

7. Если существует конечный предел суммы Римана при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, не зависящий ни от способа разбиения промежутка $[a;b]$ на промежутки, ни от выбора точек в каждом промежутке, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ и обозначается:

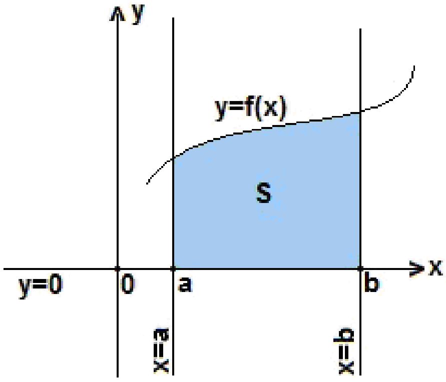
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0(n\to\infty)} S_n$$

$$= \lim_{\lambda\to 0(n\to\infty)} \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k.$$

Промежуток $[a;b]$ называется ***промежутком интегрирования***, а его концы a и b – нижним и верхним ***пределами интегрирования***. Функция $f(x)$, для которой существует на промежутке $[a;b]$ определённый интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом промежутке.



Определение 2. Пусть на промежутке $[a;b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. ***Криволинейной трапецией*** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции $f(x)$, снизу промежутком $[a;b]$ оси абсцисс, справа и слева отрезками вертикальных прямых $x = a, x = b$.



Теорема (геометрический смысл определенного интеграла).

Если неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу от этой функции по этому промежутку:

$$S_{\text{крив.трапеции}} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$.

7. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a;b]$, где $b \in [a;+\infty)$. ***Несобственным интегралом 1-го рода*** (интегралом с бесконечным верхним пределом) называется следующий предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл 1-го рода называется ***сходящимся***, а если не существует или равен ∞, – то ***расходящимся***.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a;c]$, где $c \in [a;b)$, и в точке b имеет бесконечный разрыв. ***Несобственным интегралом 2-го рода*** (интегралом от неограниченной функции) называется следующий предел:

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл 2-го рода называется ***сходящимся***, а если не существует или равен ∞ , — то ***расходящимся***.

8. Числовой ряд, его сумма, сходящийся и расходящийся ряд

Определение 1. ***Числовым рядом*** называется выражение вида:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Числовую последовательность $\{a_n\}$ называют последовательностью общего члена, число a_n — ***общим членом ряда***.

Определение 2. k-й ***частичной суммой*** числового ряда называется сумма k его слагаемых:

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Определение 3. ***Суммой*** S числового ряда называется конечный предел последовательности частичных сумм при $k \to \infty$:

$$S = \lim_{k \to \infty} S_k\,.$$

Определение 4. Если сумма числового ряда существует, то говорят, что числовой ряд ***сходится*** и пишут:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Определение 5. Если сумма числового ряда не существует или равна ∞, то говорят, что числовой ряд ***расходится*** и никакого числового значения ему не приписывают.

9. Необходимый признак сходимости числового ряда

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

10. Признаки сходимости Даламбера и Коши.

Теорема 1 (Достаточный признак сходимости Даламбера).

Пусть дан <u>*положительный*</u> числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\ a_n > 0$.

Пусть существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D.$$

Тогда:

если $0 \le D < 1$, то ряд сходится,

если $D > 1$, то ряд расходится,

если $D = 1$, то признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Теорема 2 (Достаточный признак сходимости Коши радикальный).

Пусть дан <u>*положительный*</u> числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\ a_n \ge 0$.

Пусть существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K.$$

Тогда:

если $0 \le K < 1$, то ряд сходится,

если $K > 1$, то ряд расходится,

если $K = 1$, то признак не даёт ответа о сходимости ряда.

11. Абсолютная и условная сходимости, теорема Лейбница

Определение 1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное количество как положительных, так и отрицательных слагаемых.

Определение 2. Знакопеременный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение 3. Знакопеременный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема Лейбница. Пусть дан знакопеременный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, где a_n – последовательность постоянного знака. Пусть выполняются одновременно два условия:

1. $|a_n|$ монотонно убывает, начиная хотя бы с какого-либо $n = n_0 \ge 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда знакопеременный ряд ***сходится***.